

Nome:	Cognome:	Matricola:
-------	----------	------------



**Prova scritta di Matematica Generale (EGA – Corso B)**  
**Dott. Giovanni Masala – 25 gennaio 2010.**

**PRIMA PARTE**

**Domanda 1 (punti 5; punti 4 per la prova completa).**

Determinare l'insieme di definizione, la positività e l'intersezione con gli assi della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\log(x^2 - 5x + 6)}$$

Dominio (punti 2)	$E = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \setminus \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$
Positività (punti 2)	$P = \left( 0, \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left( \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$
Intersezioni (punti 1)	$A(0;0)$

**Domanda 2 (punti 5; punti 4 per la prova completa).** Studiare la concavità e i flessi della

funzione:  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Derivata prima (punti 1)	$f' = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$
Derivata seconda (punti 1)	$f'' = \frac{2x \cdot (x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$
Insieme di convessità (punti 2) Flessi (punti 1)	convessa per $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ ; flessi in $x = \pm\sqrt{3}; 0$

**Domanda 3 (punti 5; punti 4 per la prova completa).** Studiare la crescenza e gli estremi relativi della funzione:  $f(x) = \log(x^2 + x + 1)$

Derivata prima (punti 2)	$f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$
Estremi (punti 3)	$m(-1/2; \log(3/4))$

**Domanda 4 (punti 5; punti 3 per la prova completa).** Determinare gli asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{5x^4 - x^3 - 6x^2 - 7}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)}$$

Dominio (punti 1)	$E = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2\}$
-------------------	---

Nome:	Cognome:	Matricola:
-------	----------	------------



As. verticali (punti 2)	$x = -3; \quad x = 1 \quad \text{e} \quad x = 2$
As. obliqui oppure orizzontali (punti 2)	$y = 5x - 1$

**Domande teoriche (punti 10, solo recupero I parte). (dare un esempio per ciascun quesito)**

- Il teorema di De L'Hospital (punti 4)
- Definizione di punti di flesso e legame con la derivata seconda (punti 3)
- Le forme indeterminate (punti 3)

Nome:	Cognome:	Matricola:
-------	----------	------------



## **SECONDA PARTE**

### **Domanda 5 (punti 6; punti 4 per la prova completa).**

Risolvere i seguenti integrali indefiniti e definiti:

$$\int_0^2 (x+1) \cdot (1+4x^2) \cdot x \, dx \quad \text{e} \quad \int \left( x^2 \cdot e^{1-x^3} + \frac{4x^4}{1+3x^5} \right) dx$$

Integrale definito (punti 3)	$\frac{694}{15}$
Integrale indefinito (punti 3)	$-\frac{1}{3}e^{1-x^3} + \frac{4}{15}\log(1+3x^5)$

### **Domanda 6 (punti 6; punti 5 per la prova completa).**

Discutere la compatibilità del sistema seguente in funzione del parametro reale  $k$  e determinarne le eventuali soluzioni.

$$\begin{cases} x + 2y + z = k \\ k \cdot x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Compatibilità (punti 2)	Infinite soluzioni $\forall k \in \mathbb{R}$
Soluzioni (punti 4)	$\left( y = \frac{-2+4k-4x+k \cdot x}{5}; z = \frac{4-3k+3x-2k \cdot x}{5} \right)$

### **Domanda 7 (punti 8; punti 6 per la prova completa).**

Data la funzione  $z = f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 3x \cdot y - 4x$ , determinare gli eventuali estremi liberi e gli estremi vincolati sotto il vincolo  $g(x, y) = x + 2y = 1$ .

Derivate parziali (punti 2)	$f_x = 8x - 3y - 4 \quad f_y = 2y - 3x$
Estremi liberi (punti 3)	$m(8/7; 12/7; -16/7)$
Estremi vincolati (punti 3)	$m(12/23; 11/46; -121/92) \quad \lambda = -25/46$ $H = -46$

### **Domande teoriche (punti 10, solo recupero II parte). (dare un esempio per ciascun quesito)**

- La funzione integrale (punti 3)
- Il teorema di Rouché-Capelli (punti 3)
- La matrice hessiana nei problemi di ottimizzazione (punti 4)